

时间序列分析案例报告

1. 摘要

本案例主要针对时间序列数据的残差控制图进行改进，传统的 ARMA 残差控制图由于原时间序列的均值和方差两个统计量不稳健，导致传统 ARMA 残差控制图容易受到离群值的影响。当数据中存在离群值时，控制图受到离群值的影响，控制限的间距被拉大，使得离群值的异常情况没有被监测到，从而导致控制图发生漏发报警的现象。基于这些问题，本案例对传统 ARMA 残差控制图进行稳健改进，基本思想为引入 Hampel, Dam, Huber 三种权函数，通过对残差进行分类讨论后对原序列作加权处理，使得原模型的统计量 $Z(t)$ 的方差和均值趋于稳健。从而解决传统 ARMA 残差控制图容易受到离群值的影响而使得控制限拉大而漏发报警的问题。

2. 改进措施

基于传统 ARMA 残差控制图，对其残差进行分类讨论，残差越大，赋予原序列值越小的权数，从而使得离群值对原序列的残差控制图的影响变小，增强残差控制图的准确率。分别引入 Hampel 权数、DAM 权数，Huber 权数分别就各个序列值的残差进行分段讨论，残差越小的说明是正常值，赋予序列值更大的权数，残差越大的，说明很大可能是异常值，赋予序列值更小的权数。

3. 模拟过程

本案例模拟了两组样本量为 500 的 ARMA(1,1)的模型，并且分别构造了离群率 $\varepsilon=0$ ， $\varepsilon=0.05$ 的序列。 $\varepsilon=0$ 即没有离群点， $\varepsilon=0.05$ ，即原序列有 25 个离群点。其中离群点由

$$Y = 0.95N(\mu_0, \sigma_0^2) + 0.05N(\mu_1, \sigma_0^2)$$

生成。其中 $\Phi=0.6$ ， $\Theta=-0.3$ ， $\mu_0=\pm 6$ ， $\mu_1=\pm 8$ ， $\sigma_0^2=1$

4. 结果分析

在 $\varepsilon=0$ 的情况下，只对传统 ARMA 残差控制图和 hamper 加权的稳健残差控制图的控制限进行对比，结果如下图所示：

$\varepsilon=0$		传统ARMA模型	基于hampel权函数的稳健模型
	控制上限	3.719302	3.626999
	控制中心线	-0.1164106	-0.09360837
	控制下限	-3.952123	-3.814215

图 1 无离群点下的传统 ARMA 残差控制图和基于 Hampel 权数的稳健残差控制图的控制限对比

在 $\varepsilon=0.05$ 的情况下，分别对传统 ARMA 残差控制图和基于 Hampel 权函数、DAM 权函数、Huber 权函数的稳健残差控制图的控制限进行对比，并且对准确率进行对比。

$\varepsilon=0.05$		传统ARMA模型	基于hampel权函数的稳健模型	基于dam权函数的稳健模型	基于huber权函数的稳健模型
	控制上限	8.001608	6.67408	5.190912	4.234461
	控制中心线	0.2632307	0.2034521	0.06747813	0.06577655
	控制下限	-7.475146	-6.267176	-3.303022	-2.823449

图 2 各残差控制图控制限值对比图

从上图可以看出，传统 ARMA 模型的残差控制图的确受到了离群值的影响，控制限被拉

大，而基于 huber 权函数的稳健模型的残差控制图的控制限受到的影响最小。

接下来，再看一下，以上几个模型的离群点监测的准确率（红色的点为正常值，蓝色的点为离群值）

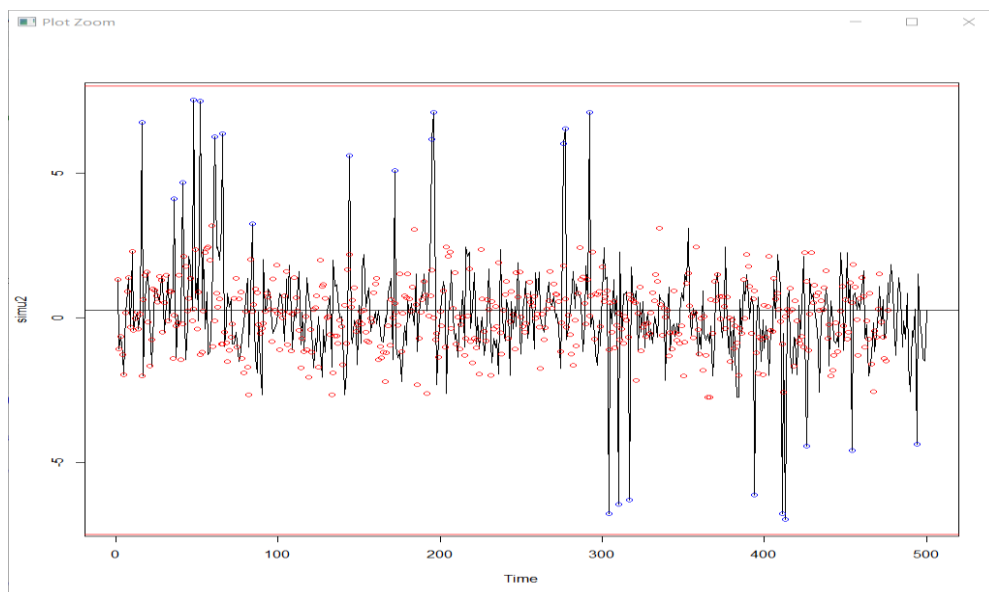


图 3 传统 ARMA 模型的残差控制图

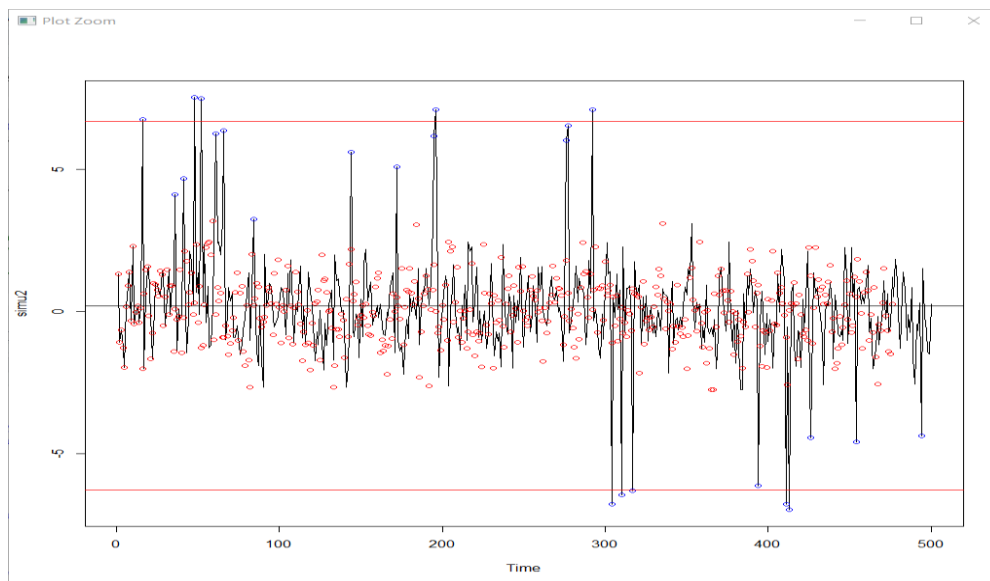


图 4 基于 hamper 权函数的稳健 ARMA 残差控制图

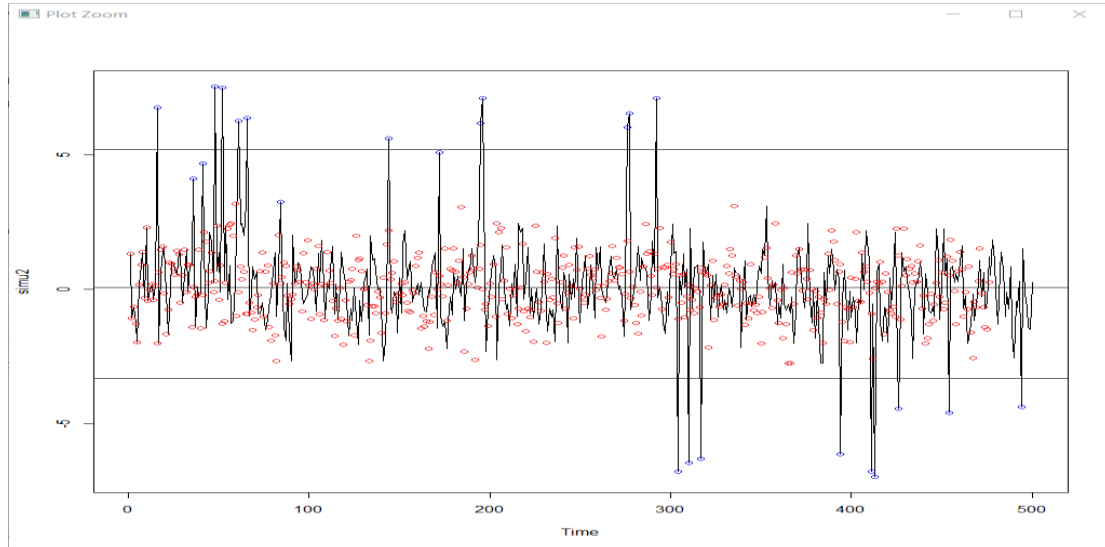


图 5 基于 DAM 权函数的稳健 ARMA 残差控制图

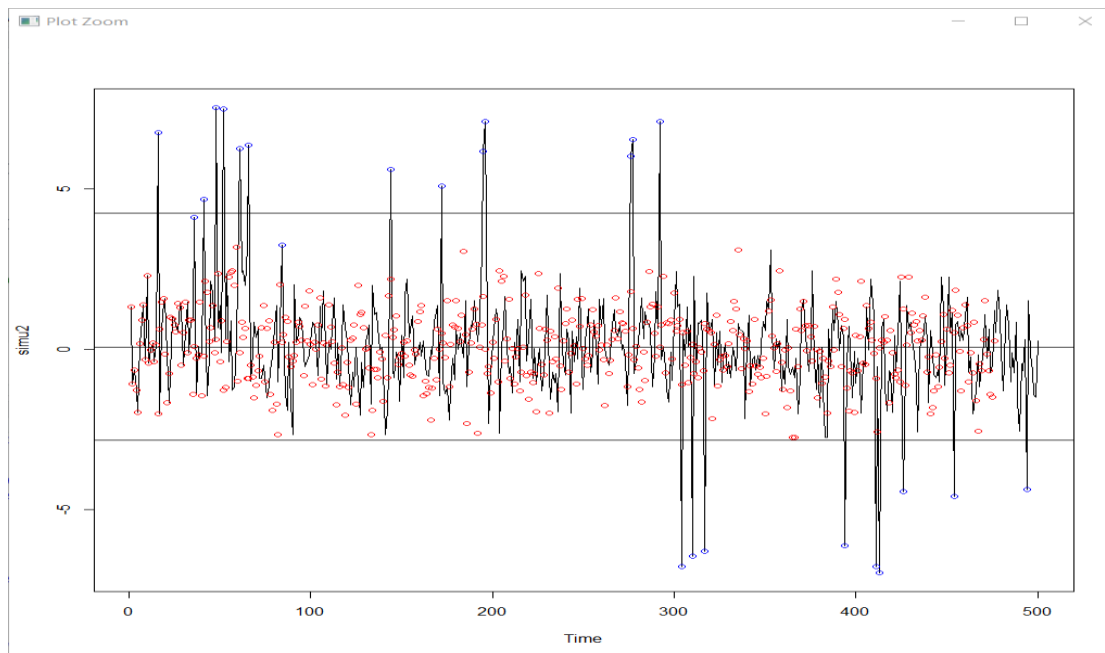


图 6 基于 huber 权函数的稳健 ARMA 残差控制图

从上面的图可以得出，传统 ARMA 残差控制图由于受到离群点的影响，拉大了控制限，并没有监测出离群点；基于 hampe1 权函数的稳健 ARMA 残差控制图，监测出了 10 个离群点，正确报警率约为 40%，漏报警率约为 60%；基于 DAM 权函数的 ARMA 残差控制图，检测出了 21 个离群点，正确报警率约为 84%，漏报警率约为 16%；基于 huber 权函数的 ARMA 残差控制图，检测出了 23 个离群点，正确报警率约为 92%，漏报警率约为 8%。

根据模拟结果，可以得出基于 huber 权函数的 ARMA 残差控制图在存在离群点的情况下，能够正确报警的概率最高，比传统 ARMA 残差控制图以及基于 hampe1 权函数和 DAM 权函数的 ARMA 残差控制图都有更好的效果。